Μάθημα 20ο

10/05/2018

Θεώρημα $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$

$\Rightarrow$ η $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $z\in D(0,R)$ είναι ολόμορφη

($\Rightarrow$ συνεχής) και έχει μιγαδική παράγωγο (την κατά όρο παράγωγο της σειράς) $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$, $z\in D(0,R)$ και η νέα σειρά-παράγωγος έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την αρχική.

$\Longrightarrow$ **ΠΟΡΙΣΜΑ** Η f είναι ΑΠΕΙΡΕΣ φορές μιγαδικά διαφορίσιμη

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-a)^{n-k}, \quad z\in D(0,R)$$

και $f\in C^{\infty}(D(0,R)) \Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^{\infty}(D(0,R))$

Δυναμοσειρές Βασικών Συναρτήσεων

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$ τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημίτονο / συνημίτονο

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C} \ (\Rightarrow \text{έχει ακτίνα σύγκλισης } R=+\infty)$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$ Οι αντίστοιχες δυναμοσειρές συγκλίνουν $\forall z \in \mathbb{C}$ αφού έχουν συντελεστές $d_{2n} = (-1)^n$ και $d_{2n+1} = 0$ για το cos και $d_{2n+1} = (-1)^n$ και $d_{2n} = 0$ για το sin τους συντελεστές $c_n = \frac{d_n}{n!}$. Άρα είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n$ με (d_n) φραγμένη η οποία σειρά, συγκλίνει σύμφωνα με το Κριτήριο Λόγου.

Από τους ορισμούς αυτούς προκύπτουν οι διάφορες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

π.χ. $\cos(-z) = \cos z$ (από την Άλγεβρα Ορίων)
$\sin(-z) = -\sin z$
($\Rightarrow \cos|_{\mathbb{R}}, \sin|_{\mathbb{R}}$ είναι άρτια και περιττή αντίστοιχα)

Επίσης $(\cos z)' = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \underset{\uparrow \text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{d}{dz}\left((-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right)}_{= 2n (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin z$$

$$\overset{!}{=}(-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)} = (-1)(-1)^{n-1}\frac{z^{2(n-1)+1}}{(2(n-1)+1)!}$$

$$(\sin z)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$$

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$ Με τον τρόπο αυτό, αποδεικνύεται ότι οι περιορισμοί $\cos|_{\mathbb{R}}$, $\sin|_{\mathbb{R}}$ έχουν τις ιδιότητες που έχουν οι αντίστοιχες γεωμετρικά ορισμένες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και τελικά ταυτίζονται με αυτές.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ Η εκθετική συνάρτηση $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ την οποία έχουμε ήδη ορίσει ως $\exp z := e^z := e^{\operatorname{Re} z}(\cos \operatorname{Im} z + i\sin \operatorname{Im} z)$

(όπου η $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\exp x = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ θεωρείται γνωστή και ειδικότερα θεωρείται γνωστή η σειρά Taylor αυτής

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$) αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης το $+\infty$ και κέντρο 0

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Απόδειξη: Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ συγκλίνει $\forall z \in \mathbb{C}$ (κρ. Λόγου)

Θεωρούμε τη συνάρτηση που ορίζει,

$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$ η οποία (ΘΕΩΡΗΜΑ) είναι ολόμορφη (και άλλα) με $F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = F(z) \quad (1)$$

Επίσης θεωρώ τη συνάρτηση $f(z) := F(z)F(c-z)$ είναι ακέραια με:

$$f'(z) = F'(z)F(c-z) + F(z)F'(c-z)(-1) \underset{(1)}{=}$$

$$= F(z)F(c-z) - F(z)F(c-z) = 0 \underset{\forall z \in \mathbb{C}}{\wedge} \overset{\mathbb{C}\ \text{τόπος}}{\Longrightarrow} f \text{ σταθ. στο } \mathbb{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = f(0)\ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = F(z)F(c-z) = f(0) =$$

$$= \underbrace{F(0)}_{=1} F(c) = F(c) \quad \forall z \in \mathbb{C},\ \forall c \in \mathbb{C} \Rightarrow$$

$$\underset{w=c-z}{\Longrightarrow} \boxed{F(z+w) = F(z)F(w), \quad z, w \in \mathbb{C}} \quad (2)$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες μερικών αθροισμάτων.

$$S_n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(iz)^\ell}{\ell!} \quad \text{με } \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{και}$$

$$\sigma_n = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} \longrightarrow$$

$$\eta_n = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \longrightarrow$$

έχουμε: $S_{4j+3} = \sum_{\ell=0}^{4j+3} \frac{(iz)^\ell}{\ell!} = \sum_{k=0}^{j} \sum_{\ell=4k}^{4k+3} \frac{(iz)^\ell}{\ell!}$

$$= \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{(iz)^{4k}}{(4k)!} + \frac{(iz)^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{(iz)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \frac{(iz)^{4k+3}}{(4k+3)!} \right)$$

και αφού $i^n = \begin{cases} 1 & , n=4k \\ i & , n=4k+1 \\ -1 & , n=4k+2 \\ -i & , n=4k+3 \end{cases}$ έχουμε:

$$S_{4j+3} = \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{z^{2(2k)}}{(2(2k))!} - \frac{z^{2(2k+1)}}{(2(2k+1))!} \right) + i \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{z^{2(2k)+1}}{(2(2k)+1)!} - \frac{z^{2(2k+1)+1}}{(2(2k+1)+1)!} \right)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{2j+1} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} + i \sum_{\ell=0}^{2j+1} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \sigma_{2j+1} + i\eta_{2j+1}$$

και άρα $\underbrace{\lim_{j\to\infty} S_{4j+3}}_{} = \lim_{j\to\infty} \sigma_{2j+1} + i \lim_{j\to\infty} \eta_{2j+1}$

$$= \boxed{F(iz) = \cos z + i\sin z} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις ιδιότητες (1), (2), (3).

$$\boxed{F'(z) = F(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{F(z+w) = F(z)F(w)}, \ \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{F(iz) = \cos z + i\sin z}, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Από αυτές και θεωρώντας γνωστό ότι

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \ x \in \mathbb{R}$$

(προκύπτει από Θ. Taylor ανεξάρτητα από αυτά που είπαμε εδώ.)

έχουμε $F(z) = F(x+iy) \underset{(2)}{=} F(x)F(iy) \underset{(3)}{=} F(x)(\cos y + i\sin y) =$

$= e^x(\cos y + i\sin y) \underset{\text{ορισμός}}{=} e^z$